

THESES

Présentées à la Faculté des Sciences de Lyon

pour obtenir le diplôme

de

DOCTEUR - INGENIEUR

par

Rémi CHAMI

Ingenieur ESIB

Licencié ès-Sciences

PREMIERE THESE

PROGRAMMES LINEAIRES GENERALISES

DEUXIEME THESE

ETUDE DE CERTAINS CAS DE FLEXION DES POUTRES

Soutenues le 19 Novembre 1964 devant la commission d'examen :

Président : M. Guy MALECOT

Examineurs : MM. Robert FERON

Lucien MARTEL

THESES

Présentées à la Faculté des Sciences de Lyon

pour obtenir le diplôme

de

DOCTEUR - INGENIEUR

par

Rémi CHAMI

Ingenieur ESIB

Licencié ès-Sciences

PREMIERE THESE

PROGRAMMES LINEAIRES GENERALISES

DEUXIEME THESE

ETUDE DE CERTAINS CAS DE FLEXION DES POUTRES

Soutenues le 19 Novembre 1964 devant la commission d'examen :

Président : M. Guy MALECOT

Examineurs : MM. Robert FERON

Lucien MARTEL



FACULTE DES SCIENCES DE LYON

Doyens honoraires

MM. LONGCHAMBON, DOUIN, MOUSSA, GAUTHIER Henri

Professeurs honoraires

MM. LOCQUIN, de LARAMBERGUE, SOLLAUD, MENTZER,
MOUSSA, JAFFARD, DOUIN, Henri EYRAUD, DEJARDIN, VIRET

Doyen

M. BRACONNIER

Assesseurs

MM. MESNARD, BOIDIN

Professeurs

MM. LONGCHAMBON	Minéralogie
PRETTE	Chimie industrielle
COURTY	Chimie-Physique
KUHNER	Botanique
MALECOT	Mécanique rationnelle et appliquée
PARIS	Chimie minérale
AUMERAS	Chimie
COLONGE	Chimie organique
JANIN	Physique générale
FLANDRIN	Géologie appliquée
BERNARD	Physique industrielle
DUFAY Jean	Astronomie
NIGON	Zoologie expérimentale
GAUTHIER Henri	Géologie générale
WAUTIER	Zoologie
CHOPIN	Chimie biologique
CUEILLERON	Chimie
BRACONNIER	Calcul différentiel et intégral
EYRAUD Charles	Chimie-Physique appliquée
SARAZIN	Physique nucléaire
BOIDIN	Microbiologie et Mycologie
PERES	Physiologie
MESNARD	Electronique
GRANDMONTAGNE	Physique
BOUTILLIER	Minéralogie
LAFOUCRIERE	Physique nucléaire théorique
DREUX	Chimie organique
TEICHNER	Chimie industrielle
PAVANS DE CECCATTY	Zoologie
MERLIN	Chimie analytique
DUFAY Maurice	Physique de l'Atmosphère
LUBET	Physiologie
PHILBERT	Physique nucléaire
COHEN-ADAD	Chimie
DAVID Louis	Géologie générale
CHANEL	Psychophysiologie
MAURY	Méthodes mathématiques de la Physique

Professeurs (suite)

DEPRAZ	Physique nucléaire
GAUTHIER Jean	Chimie
GAUME	Physique expérimentale

Professeurs sans chaire

MM.	FERON	Mathématiques
	LAFORGUE	Physique
	LEGAY	Zoologie expérimentale S. P. C. N.
	UZAN	Physique S. P. C. N.
	CHENEVOY	Géologie appliquée
	GINET	Zoologie
	ASCH	Physique
	MICHEL Pierre	Minéralogie
	DUCET	Biologie végétale
Mle	MAITROT	Physique
MM.	GEVIN	Géologie générale
	PONASSE	Mathématiques
	d'INCAN	Physique
	LEFEBVRE	Mathématiques
	PERNET	Mathématiques
	CHERY	Physique
	BERGEON	Physique C. S. U.
Mle	GAUTHERON	Chimie biologique

Maîtres de Conférences

Mme	ERICSON	Physique générale
MM.	MARTEL	Mécanique
	MATHIEU	Mécanique des Fluides
	ERBEIA	Physique
	DESCOTES	Chimie organique
	PICARD Philippe	Mathématiques
	LEMOIGNE	Botanique
	DEMARCO	Géologie générale
	MICHEL Georges	Biochimie
	LEBRETON	Biologie végétale
	DAVID Jean	Biologie animale
	TOUSSET	Chimie propédeutique
	FEUVRAIS	Physique Electricité
	PICARD Claude	Mathématiques
	SCHMITT	Physique M. P. C.
	LAURENT	Chimie organique
	ROT	Mathématiques
	BETHOUX	Mathématiques
Mle	CALAIS	Mathématiques

Maître de Conférences adjoint

M.	PIERRON	Chimie
----	---------	--------

Conseiller Administratif

M.	BURNET
----	--------

Sécrétaire Principal Honoraire

M.	ROUX
----	------

AU PROFESSEUR
Pierre LALANGUE

*par les encouragements duquel
ce travail fut entrepris.*

AU PROFESSEUR

Robert FERON

*Il a été notre guide tout le long
de ce travail. Ses précieux conseils,
ses fécondes suggestions, son sens
de la rigueur et de la précision
nous ont beaucoup aidé.*

*Nous ne le remercierons
jamais assez.*

Nous remercions également Monsieur le Professeur G. Malécot, et Monsieur le Professeur Lucien Martel, pour avoir bien voulu examiner ce travail, le professeur Jean Chevrier, directeur du Centre d'Etudes Mathématiques de Beyrouth, pour ses conseils judicieux et Monsieur Francis Fouré, directeur de l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Beyrouth qui nous a beaucoup facilité les démarches administratives.

PROGRAMMES LINEAIRES
GENERALISES

TABLE DES MATIERES

CHAP. I — INTRODUCTION	Page 5
I - 1 Historique	
I - 2 Situation du problème	
CHAP. II — LE PROBLEME	9
II - 1 Le problème général-Exemples	
II - 2 Formulation du problème général	
II - 3 Problème réduit	
CHAP. III — PROPRIETES ET THEOREMES FONDAMENTAUX DES PROGRAMMES LINEAIRES	17
III - 1 Définitions	
III - 2 Rappels de quelques propriétés des ensembles convexes	
III - 3 Théorèmes fondamentaux	
III - 4 Conséquence	
CHAP. IV — METHODES DE RESOLUTION	24
IV - 1 Méthode du simplexe	
IV - 2 Interprétation économique de la méthode	
IV - 3 Cas particuliers	
IV - 4 Problèmes particuliers	
CHAP. V — THEOREME DE KUHN-TUCKER - PROGRAMMES QUADRATIQUES	35
V - 1 Introduction	
V - 2 Théorème de Kuhn-Tucker	
V - 3 Programmes quadratiques-Méthode de résolution	
V - 4 Autres méthodes	
CHAP. VI — PROGRAMMES LINEAIRES STOCHASTIQUES	45
VI - 1 Introduction	
VI - 2 Modèle I	
VI - 3 Modèle II	
VI - 4 Modèle III	
BIBLIOGRAPHIE	55

CHAPITRE I

INTRODUCTION

I - 1 Historique

La recherche du maximum ou du minimum, ou en général des solutions optima pour divers problèmes a préoccupé l'homme depuis longtemps ; ainsi Euclide avait montré comment tracer un parallélogramme ayant une surface maximum pour un périmètre donné.

Toutefois, il fallut attendre le développement au XVII^e et XVIII^e siècle du calcul infinitésimal et le calcul des variations pour avoir une étude rigoureuse des problèmes d'optima liés; le problème de l'optimum lié classique fut alors résolu par la méthode "des multiplicateurs de Lagrange", qui nous apprend que :

" Si $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i=1, \dots, m$, sont $m+1$ fonctions dont les dérivées partielles sont continues au voisinage de $a(a_1, a_2, \dots, a_n)$; si $\frac{D(g_1, \dots, g_m)}{D(a_1, \dots, a_n)} \neq 0$ en a , et si $g_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ $i=1, \dots, m$, une condition nécessaire pour que $a(a_1, a_2, \dots, a_n)$ soit un extrémum de f est qu'il existe m constantes réelles, $u_1, u_2, \dots, u_m$ telles que quel que soit j ont ait :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = u_1 \frac{\partial g_1(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_j} + u_2 \frac{\partial g_2(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_j} + \dots + u_m \frac{\partial g_m(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_j}$$

Le problème de l'extrémum lié ainsi posé eut beaucoup d'applications fécondes en géométrie, physique et mécanique.

Récemment, l'introduction d'espaces affins normés (qui peuvent être de dimension infinie) a fait prendre au théorème de l'optimum lié classique la forme suivante :

“ Soient $f, g_1, g_2, \dots, g_m$ des fonctions réelles, continuellement dérivables sur un ouvert Ω d'un espace affiné normé E . Soit a un point vérifiant les équations $\blacksquare \quad g_1(a) = g_2(a) = \dots = g_m(a) = 0$;

Si les formes linéaires $g'_1(a), g'_2(a), \dots$ sont indépendantes, une condition nécessaire pour que a soit un maximum ou un minimum est qu'il existe des constantes réelles $u_1, u_2, \dots, u_m$ telles que l'on ait la relation : $f'(a) = u_1 g'_1(a) + u_2 g'_2(a) + \dots + u_m g'_m(a)$

Par ailleurs, l'étude scientifique des problèmes que posent l'organisation du travail, les opérations militaires, la gestion des entreprises, l'économetrie et la science économique en général et beaucoup d'autres, a amené à envisager le problème de l'optimum lié classique d'une façon plus générale : il s'agit d'optimiser f compte tenu de $g_i \geq 0 \quad i=1, \dots, m$. Le cas où les fonctions f et g_i sont linéaires a été alors résolu et a pris le nom de “ programmation linéaire.”

Mais les problèmes mentionnés ci-dessus ne se présentent pas toujours comme tels, et on a été conduit à envisager une généralisation du programme linéaire classique ; c'est cette généralisation qu'on essaye de faire maintenant et ceci de deux manières différentes :

a) Le programme linéaire généralisé étudié notamment par Frisch, (f et g_i ne sont plus linéaires). On se borne en général en ce moment à traiter des cas particuliers, bien que le théorème de Kuhn-Tucker et la méthode du potentiel logarithmique de Frisch soient assez généraux.

b) L'introduction de l'aléatoire dans les programmes linéaires : les coefficients des variables considérées ne sont plus des constantes, mais des variables aléatoires.

I - 2 Situation du problème

L'effort des chercheurs, d'abord, a eu pour but le désir de faire de la programmation linéaire un outil de la technique économique et de la gestion scientifique des entreprises, ce qui lui a donné un caractère particulier, celui

d'être astreinte à l'efficacité. (Autrement dit, il faut que le temps et le coût de l'obtention d'une solution restent inférieures à des limites raisonnables) Ainsi s'explique le développement de la méthode du simplexe de Dantzig qui s'est avérée être très efficace.

Quoi qu'il en soit, la programmation linéaire classique est ébauchée en partie dans les travaux d'analyse intersectorielle (Input - output) de Léontief (1920) mais c'est en 1941 que l'on trouve formulé dans la littérature, un problème particulier de programmation linéaire, le problème de transports par Hitchcock, puis par Koopmans; en 1947 le problème général de programmation linéaire est formulé en termes mathématiques par Dantzig et des chercheurs du "U.S. Department of the Air Force".

A partir de 1950, diverses institutions, surtout américaines (Cowles Commission, Rand Corporation, Universités de Princeton et Carnegie, ..) ont contribué au développement des différentes méthodes et ramifications de la programmation linéaire.

- Méthodes de résolution, mise en œuvre sur ordinateurs et applications industrielles.
- Programmes linéaires paramétriques : les coefficients des contraintes et de la fonction à optimiser dépendent de paramètres.
- Programmation séquentielle (ou dynamique) : les programmes linéaires portent sur plusieurs périodes.

Les chapitres II et III qui suivent traiteront de la théorie générale et le chapitre IV exposera la méthode de résolution du simplexe ainsi que certains cas particuliers.

Par ailleurs diverses méthodes de résolution, applicables aux programmes non-linéaires, telles la méthode du potentiel logarithmique de Frisch et la méthode du gradient de Arrow - Hurwicz, ainsi que l'approximation des programmes non-linéaires par des programmes linéaires, sont encore expérimentées. Le chapitre V étudiera le théorème de Kuhn-Tucker et la généralisation de la méthode du simplexe aux programmes quadratiques.

Enfin, ces dernières années, divers essais ont été faits pour essayer de tenir compte des phénomènes aléatoires qui peuvent intervenir dans la formulation des programmes linéaires classiques. Le chapitre VI traitera des programmes linéaires stochastiques et de la résolution de quelques modèles s'y rapportant.



CHAPITRE II

LE PROBLEME

II - 1 Le problème général : exemples

II - 1 - a) Le problème général de programmation linéaire consiste en la recherche de l'optimum (minimum ou maximum) d'une fonction linéaire de variables x_j , ($j=1, \dots, n$) liées par des relations (équations ou inéquations) linéaires appelées contraintes. Certaines de ces contraintes sont du type $x_j \geq 0$, on les appelle contraintes de non-négativité, (les autres contraintes étant des contraintes fonctionnelles).

La traduction algébrique de ce qui précède peut alors toujours se ramener à :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq d_i \quad i=1, \dots, m \quad (1)$$

$$x_j \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{minimiser (ou maximiser)} \quad z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3)$$

II - 1 - b) 1er exemple : le problème du transport :

Un industriel voudrait transporter certaines quantités de marchandise stockée dans divers dépôts à un certain nombre de magasins. Chaque magasin a une demande bien définie alors que chaque dépôt a un stock bien déterminé. Il s'agit de minimiser le coût du transport.

Soient :

m == le nombre de dépôts,

n == le nombre de magasins,

a_i == le stock disponible au dépôt i ,

b_j == la demande du magasin j ,

x_{ij} == la quantité transportée du dépôt i au magasin j

On doit avoir :

$$\sum_i a_i > \sum_j b_j \quad (\text{les stocks sont supérieurs à la demande})$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j \quad (\text{les quantités transportées à chaque magasin sont égales à la demande})$$

$$\sum_j x_{ij} \leq a_i \quad \begin{array}{l} (i = 1, \dots, m) \\ (j = 1, \dots, n) \end{array} \quad \begin{array}{l} (\text{les quantités transportées de} \\ \text{chaque dépôt ne dépassent} \\ \text{pas les stocks}) \end{array}$$

Supposons que l'on connaisse le coût c_{ij} de transport d'une unité du dépôt i au magasin j ; il s'agit de minimiser le coût de l'opération c'est à dire rendre $\sum c_{ij} x_{ij}$ minimum ; avec en plus la condition $x_{ij} \geq 0$ ($x_{ij} < 0$ signifierait qu'on transporte du magasin j au dépôt i)

II - 1 - c) 2eme exemple : problème du régime alimentaire.

Etant donnés les "constituants" nutritifs (calories, protéines, matières grasses, vitamines, ...) d'un certain nombre d'aliments différents, et étant donnés les besoins journaliers de chacun de ces constituants, ainsi que le prix d'une unité de chaque aliment, le problème est de déterminer le régime alimentaire qui satisfasse aux nécessités journalières au moindre prix .

Soient :

m = le nombre de constituants nutritifs,

n = le nombre d'aliments,

a_{ij} = le nombre d'unités du constituant i contenu dans l'aliment j ,

b_i = le nombre d'unités minimum requis du constituant i ,

c_j = coût de l'unité de l'aliment j ,

x_j = nombre d'unités de l'aliment j à fournir

On doit avoir : $x_j \geq 0$

$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i=1, \dots, m$ (les quantités totales du constituant i contenues dans tous les aliments doivent satisfaire les quantités minima); et il faut minimiser le coût de l'opération, soit :

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{minimum}$$

II - 1 - d) 3ème exemple : détermination d'un programme de fabrication d'une entreprise.

Une entreprise dispose d'un certain nombre de ressources. Ces ressources (matières brutes, travail, équipements...) peuvent être produites ou consommées par un ou plusieurs biens produits. On suppose connue la proportion dans laquelle un bien produit fait intervenir les différentes ressources ainsi que le coût unitaire de chaque bien produit. Il s'agit de minimiser le coût total.

Soient :

m = nombre de ressources,

n = nombre de biens produits,

a_{ij} = la quantité de la ressource i intervenant dans le bien produit j
au niveau unité,

d_i = la quantité demandée ou disponible de la ressource i ,

c_j = coût unitaire du bien produit j au niveau unité,

x_j = quantité du bien j produite.

Cet exemple ainsi que la terminologie employée seront utilisés dans la suite de l'exposé pour interpréter les résultats obtenus.

II - 2 - Formulation du problème général

II - 2 - 1) forme algébrique

Le problème général tel que formulé en (II-1-a) peut toujours se mettre sous la forme suivante :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq d_i \quad i=1, \dots, m \quad (1)$$

$$x_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n \quad (2)$$

$$\text{minimiser } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3)$$

En effet, on peut toujours supposer que certaines des contraintes fonctionnelles ont été multipliées par -1 lorsque cela était nécessaire pour que toutes les inégalités soient dans le même sens ($\geq$ par exemple), et que certaines des variables ont été remplacées par leurs opposées pour que les seules conditions supplémentaires imposées à ces variables soient des conditions de non-négativité.

(1) signifie que la ressource i produite ou consommée doit satisfaire la demande ou disponibilité de cette ressource :

si $d_i > 0$ il y a demande

si $d_i < 0$ il y a disponibilité

Dans cette formulation du problème, on suppose que les quantités x_j des m ressources mises en œuvre par le bien j produit sont proportionnelles aux quantités a_{ij} intervenant au niveau unité c'est à dire que le rendement est constant et qu'il n'y a pas de substitutions possibles entre les diverses ressources intervenant dans un bien produit.

Exemple : considérons la fabrication de béton à partir de ciment, de sable, de gravier et d'eau ; l'hypothèse précédente signifie que les quantités de ciment, sable, gravier et eau sont proportionnelles à la quantité de béton produite, et que s'il faut n_1 m³ de ciment n_2 m³ de sable, n_3 m³ de gravier et n_4 m³ d'eau pour produire un m³ de béton, il est impossible d'obtenir un m³ de béton (les conditions techniques étant les mêmes) à partir de n'_1 m³ de ciment, n'_2 m³ de sable, n'_3 m³ de gravier et n'_4 m³ d'eau avec $n'_1 < n_1$ ou $n'_2 < n_2$ ou $n'_3 < n_3$

On suppose aussi que la quantité x_j d'un bien produit peut prendre n'importe quelle valeur positive, c'est à dire qu'il n'y a pas indivisibilité.

Ceci veut dire avec l'exemple précédent qu'on peut produire n'importe quelle quantité de béton (éventuellement entre un maximum et un minimum). En pratique, ceci n'a pas toujours lieu, car on veut généralement utiliser un nombre entier de sacs de ciment.

Enfin le coût $c_j x_j$ de chaque bien produit est directement proportionnel à la quantité produite et c_j est constant, quelle que soit cette quantité.

Ceci veut dire que le coût de la quantité de ciment mise en œuvre est indépendante de la valeur de cette quantité, ce qui est vrai lorsque le coût est indépendant de la production ; pour ceci il faut que le coût moyen soit égal au coût marginal ; il en est autrement souvent dans la pratique où le coût dépend de la production (ce cas sera examiné par la suite).

II-2-2) Forme matricielle*

Soient :

$A = (a_{ij})$ la matrice $m \times n$ des coefficients,

$X = (x_j)$ la matrice $n \times 1$ des x_j ,

$d = (d_i)$ la matrice $n \times 1$ des d_i ,

$c = (c_j)$ la matrice $1 \times n$ des c_j ,

O = la matrice $n \times 1$ dont tous les éléments sont nuls.

On a alors :

$$A X \supseteq d \quad (1')$$

$$X \supseteq O \quad (2')$$

$$\text{Minimiser} \quad Z = c X \quad (3')$$

*Les matrices seront notées par des lettres majuscules ou minuscules sans indices, sauf s'il peut y avoir ambiguïté, auquel cas elles seront notées (A) , (X) ou (d) ...

II - 2 - 3) Forme vectorielle

Soient :

a = application linéaire de matrice A ,

$\vec{x} = (x_j)$ un vecteur de composantes $x_j \in \mathbb{R}^n$,

$\vec{d} = (d_i)$ un vecteur de composantes $d_i \in \mathbb{R}^m$,

$\mathcal{C}$ = application linéaire de matrice c ,

$\vec{O}$ = le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$

$$(1) \text{ se traduit par } a \vec{x} \geq \vec{d} \quad (1'')$$

$$(2) \text{ se traduit par } \vec{x} \geq \vec{O} \quad (2'')$$

$$(3) \text{ se traduit par minimiser } z = \mathcal{C} \vec{x} \quad (3'')$$

II - 3 - Problème réduit

On peut toujours remplacer les inégalités (1) par des égalités en ajoutant ou en soustrayant une variable supplémentaire non-négative (appelée variable d'écart) affectée d'un coefficient nul dans la fonction à minimiser.

Ceci revient à introduire des "biens produits neutres", c'est à dire dont le coût est nul, dans l'entreprise.

On a alors :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{n+i} = d_i \quad i = 1, \dots, m \quad (1''')$$

$$x_{n+i} \geq 0$$

$$\text{Soit } A' = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} \dots a_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix} \text{ la matrice } m \times (n+m)$$

le problème revient alors à déterminer X' ($x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$)
tel que

$$A' X' = d \quad (1''')$$

$$X' \geq 0 \quad (2''')$$

$$\text{minimiser } c' X' \quad (3''') \quad c' = (c_1, c_2, \dots, c_n, 0 \dots 0)$$



CHAPITRE III

PROPRIETES ET THEOREMES FONDAMENTAUX DES PROGRAMMES LINEAIRES

III - 1 Définitions

III - 1 - 1 On appellera :

Solution : Un ensemble de valeurs des variables satisfaisant au système des contraintes fonctionnelles (1).

Solution réalisable : Un ensemble de valeurs positives des variables satisfaisant au système des contraintes fonctionnelles (c'est à dire satisfaisant aux contraintes de non-négativité et aux contraintes fonctionnelles).

Solution réalisable optimale : Toute solution réalisable rendant optimale la forme linéaire donnée.

Base du système : Un système de m vecteurs linéairement indépendants $\vec{a}_j \in R^m$ dont les composantes sont les colonnes de la matrice A . (Ces vecteurs sont des bases particulières de R^m au sens classique).

Variables fondamentales : Celles des variables ($x_1, x_2, \dots, x_n$) qui sont associées aux vecteurs d'une base.

Variables secondaires : les $(n-m)$ autres variables. (Celles qui ne sont pas associées aux vecteurs de la base).

Solution fondamentale : Une solution telle que les variables secondaires soient nulles.

Solution réalisable fondamentale : Solution fondamentale telle que les variables soient ≥ 0 .

Solution fondamentale optimale : Solution fondamentale qui rend optimale la forme linéaire.

III - 1 - 2 Si $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur donné (non nul) et $\alpha \in \mathbb{R}$,

On appelle : (Si $\vec{x}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ correspondant au point x de l'espace affiné associé et X la matrice correspondante)

- **hyperplan** : l'ensemble $P = \left\{ x \mid \vec{a} \cdot \vec{x} = \alpha \right\}$

- **demi-espace fermé** : l'ensemble $H = \left\{ x \mid \vec{a} \cdot \vec{x} \geq \alpha \right\}$

- **Ensemble Convexe** : C , un ensemble de points tel que

$X_1 \in C, X_2 \in C$, et $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow t \vec{x}_1 + (1-t) \vec{x}_2 \in C$

- **point extrémal** : d'un ensemble convexe tout point X de C tel qu'il soit impossible de trouver deux points $X_1 \in C$ et $X_2 \in C$ tels que

$$\vec{x} = t \vec{x}_1 + (1-t) \vec{x}_2 \quad 0 < t < 1$$

-(On dit qu'un ensemble E est situé d'un seul côté d'un hyperplan

$\vec{a} \cdot \vec{x} = \alpha$ si $\vec{a} \cdot \vec{x} \geq \alpha$ pour tout $X \in E$ ou $\vec{a} \cdot \vec{x} \leq \alpha$ pour tout $X \in E$)

- **hyperplan d'appui** P_a à un convexe C : un hyperplan qui contient au moins un point de C et tel que tous les points de C soient d'un seul côté de P_a

- **polyèdre convexe** : un ensemble convexe qui possède un nombre fini de points extrémaux,

Ou, définition équivalente (démontré par Weyl)¹⁰: l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés.

III - 2 - Rappel de quelques propriétés des ensembles convexes

- 1 - L'intersection d'ensembles convexes est elle-même un ensemble convexe.
- 2 - Un ensemble convexe C de R^n fermé et borné, possède au moins un point extrémal; tout hyperplan d'appui à C contient au moins un point extrémal de C .
- 3 - L'intersection de polyèdres convexes est un polyèdre convexe
- 4 - Etant donné un polyèdre convexe K de R^n défini par le système

$$\vec{a_i} \cdot \vec{x} \leq d_i \quad i = 1, \dots, m; \quad m \geq n; \quad \text{une condition}$$
nécessaire et suffisante pour qu'un point X_0 de K soit extrémal est que X_0 soit solution d'un sous-système :

$$\vec{a_i} \cdot \vec{x_0} = d_i \quad i \in J \subset \{1, \dots, m\} \quad \text{régulier d'ordre } n.$$

Démonstration :

Le système régulier considéré peut s'écrire $A'X = d'$ en notations matricielles

a) La condition est suffisante :

Soit X_0 une solution de $A'X = d'$, et supposons que l'on puisse trouver 2 points distincts X_1 et X_2 de K tels que

$X_0 = tX_1 + (1-t)X_2 \quad 0 < t < 1$; dans ce cas, puisque

$A'X_1 \geq d' \quad \text{et} \quad A'X_2 \geq d' \quad \text{on aurait:}$

$$A'X_0 = A'X_1 = A'X_2 = d'.$$

A^* étant une matrice régulière par hypothèse on a $X_0 = X_1 = X_2$, X_1 et X_2 ne sont donc point distincts de X_0 , et X_0 est un point extrémal de K .

b) La condition est nécessaire

Soit X_0 un point extrémal de K , A_i désignant la ligne i de la matrice A , on a $A_i X_0 \leq d_i \quad i = 1, \dots, m$ on peut toujours trouver un ensemble I non vide tel que :

$$A_i X_0 = d_i \quad i \in I$$

$$\text{et} \quad A_i X_0 < d_i \quad i \notin I$$

en effet si on avait $A_i X_0 < d_i \quad i = 1, \dots, m$, on pourrait toujours trouver un vecteur $d X_0$ assez petit pour que :

$$A_i (X_0 \pm d X_0) < d_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\text{et} \quad X_0 = \frac{1}{2} (X_0 + d X_0) + \frac{1}{2} (X_0 - d X_0)$$

ne serait pas extrémal puisque c'est une combinaison convexe de deux points distincts de K)

Soit $(a)_h$ la matrice $n \times h$ ($n \leq h \leq m$) telle que :

$$(a)_h X_0 = (d)_h$$

si $h > n$, les vecteurs-colonnes formant $(a)_h$ ne sont pas indépendants dans R^n et par suite il existe un point Y à h composantes tel que :

$$(a)_h Y = 0$$

On peut alors définir pour $k > 0$ suffisamment petit deux points :

$$U = X_0 - k Y$$

$$V = X_0 + k Y$$

ayant toutes leurs composantes positives et appartenant à K puisque $(a)_h \cup (a)_h \cup V = (d)_h$, $X_0 = \frac{U + V}{2}$, combinaison convexe de deux points de K ne serait pas extrémal; donc $h = n$ et la matrice $(a)_h = A'$ est une matrice régulière d'ordre n .

III - 3 - Théorèmes fondamentaux

Th. 1 L'ensemble des points représentant les solutions réalisables forme un polyèdre convexe K dans l'espace R^n .

Dem. c'est en effet une intersection de demi - espaces fermés

$$\text{définis par } \vec{a} \cdot \vec{x} \geq d \quad \text{et} \quad \vec{x} \geq \vec{0}$$

Th. 2 L'ensemble des solutions réalisables optimales est l'intersection du polyèdre K des solutions réalisables avec un hyperplan d'appui à ce polyèdre.

Démonstration

En effet les équations $c \cdot X = z$ représentent (si z est un paramètre variable), une famille d'hyperplans parallèles de R^n . Par définition, l'hyperplan $c \cdot X = z$ sera un hyperplan d'appui à K si pour tout :

$$X \in K \quad \text{on a} \quad c \cdot X \geq \bar{z} \quad \text{et s'il existe au}$$

$$\text{moins un point } \bar{X} \in K \quad \text{tel que } c \cdot \bar{X} = \bar{z}$$

a) Un tel point $\bar{X}$, s'il existe, est une solution réalisable qui donne à z sa valeur minimale $\bar{z}$, c'est donc une solution réalisable optimale (ici minimale)

b) s'il existe deux points $X_1 \in K$ et $X_2 \in K$ (ou plusieurs points) tels que $c X_1 = \bar{z}$, $c X_2 = \bar{z}$, toute combinaison convexe $\bar{X} = t X_1 + (1-t) X_2$ appartient à K et sera une solution réalisable optimale car $c \bar{X} = t c X_1 + (1-t) c X_2 = \bar{z}$

Corollaire :

S'il existe au moins une solution réalisable, il existe au moins une solution réalisable extrême.

S'il existe au moins une solution réalisable optimale, il existe au moins une solution réalisable optimale extrême.

On déduit de l'énoncé précédent que : la fonction $c X$ atteint son optimum en un ou plusieurs des points extrêmes de K , et en tous les points de l'ensemble engendré par ces derniers.

Th. 3 La condition nécessaire et suffisante pour que $X (x_1 \ x_2 \dots x_n)$ soit un point extrême de K est qu'il soit une solution réalisable fondamentale.

(c'est à dire que $\vec{x} (x_1 \ x_2 \dots x_n)$ ait exactement m composantes non nulles).

Démonstration :

D'après III - 2 - 4 pour que X soit un point extrême de K , il faut et il suffit qu'il soit solution du sous-système $A' X = d'$, $A' \subset A$ étant une matrice régulière d'ordre n .

Si on peut extraire du système $A X = d$
 $I^{(n)} X \geq 0$
 un sous-système $A' X = d'$ régulier d'ordre n , A' et d'
 étant des sous-matrices tirées de $\begin{pmatrix} A \\ I^{(n)} \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$
 on aura $\sum_{j \in J_i} a_{ij} x_j = d_i \quad i \in I, \quad i \in \{1, \dots, m\}$
 $J_1 \subset \{1, \dots, n\} \quad \text{et } x_j = 0 \quad j \in \{1, \dots, n\} - J_1$

C'est à dire que $X (x_j)$ est une solution réalisable fondamentale par définition.

Th. 4 Etant donné un problème de programmation linéaire sous forme réduite :

- a) S'il admet une solution réalisable finie, il admet au moins une solution réalisable fondamentale.
- b) S'il admet au moins une solution réalisable optimale il admet au moins une solution réalisable optimale fondamentale.

En effet :

Ceci résulte de la combinaison du corollaire de III-3-2 et du théorème III-3-3.

Interprétation :

Dans le cas de l'entreprise, ceci veut dire qu'une solution réalisable comprend au moins m biens produits en quantités non nulles et il existe une solution réalisable optimale qui comporte au plus m biens produits en quantités non nulles.

III - 4 - Conséquences

De ce qui précède on déduit que pour trouver une solution réalisable optimale, il suffit de considérer les points extrêmes de (K) , c'est à dire les solutions réalisables fondamentales du système.

CHAPITRE IV

METHODES DE RESOLUTION

IV - 1 - Méthode du Simplexe

a) Introduction

On a vu que pour trouver une solution réalisable optimale il suffit de considérer les solutions fondamentales. Le calcul de toutes les solutions fondamentales étant souvent fastidieux sinon impossible, la méthode du simplexe consiste à déterminer, à partir d'une solution fondamentale de départ, une solution réalisable qui se rapproche de la solution optimale cherchée, jusqu'à trouver celle-ci après un nombre fini d'itérations.

b) Principe

Pour ceci on détermine un point extrémal du polyèdre convexe et on calcule la valeur de z pour ce point, puis on essaye de déterminer un point extrémal "voisin" qui donne à z une valeur inférieure à celle obtenue avec le point précédent, et ainsi de suite, jusqu'à déterminer celui (ou ceux) des points extrémaux qui donne à z sa valeur minimale.

Le nombre des points extrémaux étant fini on est sûr d'arriver à une solution optimale après un nombre fini d'itérations.

c) Notations

Soit B une base du système $(1')$, X^B la matrice-colonne des m variables et c^B la matrice-ligne des constantes, qui lui sont associées, on suppose que $m < n$ et que le rang de A est m)

Soit X^R la matrice colonne des $n-m$ variables secondaires. R et c^R la matrice et la matrice-ligne des constantes qui lui sont associées. $\bar{X}$, $\bar{z}$ désigneront des valeurs numériques de X et z .

Le système (1') peut alors s'écrire :

$$BX^B + RX^R = d \quad (4,1)$$

$$\text{ou} \quad X^B + B^{-1}RX^R = B^{-1}d \quad (4,2)$$

la solution fondamentale associée à B ($X^R = 0$) et qui fournit un point extrémal de (K) est donnée en résolvant l'équation matricielle : $B \bar{X}^B = d$; soit $X^B = B^{-1}d$ la valeur correspondante de z est alors $\bar{z} = c^B B^{-1}d$.

Cherchons à déterminer la valeur prise par z pour un autre point que celui déterminé précédemment, pour ceci nous essaierons d'exprimer z en fonction des variables secondaires X^R .

$$\text{Posons} \quad B^{-1}R = Y \quad (4,3)$$

$$(4,2) \quad \text{s'écrit} \quad X^B + Y X^R = \bar{X}^B \quad (4,4)$$

$$\text{et} \quad c^B X^B + c^R X^R = z \quad (4,5)$$

Multiplions (4.4) par c^B et soustrayons de (4.5), il vient :

$$(c^R - c^B Y) X^R = z - c^B \bar{X}^B = z - \bar{z} \quad (4.6)$$

Si I est l'ensemble des indices de colonne des vecteurs de la base et $J = N - I$ l'ensemble des indices des $n - m$ colonnes restantes de A , soit (Y_j) les matrices colonnes formant Y , (4.6) peut s'écrire sous la forme :

$$\sum_{j \in J} (c_j - c^B (Y_j)) x_j = z - \bar{z}$$

$$\text{ou en posant} \quad c^B (Y_j) = z_j$$

$$\sum_{j \in J} (c_j - z_j) x_j = z - \bar{z} \quad (4.7)$$

d) Propriétés

d - 1 Si pour un $k \in J$ on a $z_k - c_k > 0$ et $(Y_k) \leq 0$ on peut toujours constituer une classe de solutions telle qu'elle rende z aussi petit que l'on veut en valeur algébrique; et par suite il n'y a pas de programme minimal fini ;

en effet : (4.4) peut s'écrire

$$X^B + \sum_{j \in J} x_j (Y_j) = \bar{X}^B$$

Puisque $(Y_k) \leq 0$ on peut partant de $X^B = \bar{X}^B$ obtenir une autre solution en donnant à la variable x_k n'importe quelle valeur positive $\bar{x}_k$; les autres variables secondaires restant nulles alors on aurait :

$$\bar{X}'^B = \bar{X}^B - \bar{x}_k (Y_k) \geq \bar{X}^B$$

et d'après (4.7) z prend la valeur

$$\bar{z}' = \bar{z} - (z_k - c_k) \bar{x}_k$$

si $x_k \rightarrow \infty$ puisque $z_k - c_k > 0$ $\bar{z}' \rightarrow -\infty$

d - 2 Si pour un $k \in J$ on a $z_k - c_k > 0$ et si pour au moins un $s \in I$ on a $y_{sk} > 0$ [$y_{sk} \in (Y_k)$] la solution fondamentale associée à la base B' déduite de B par substitution de (A_k) à (A_l) , l étant défini par :

$$\frac{\bar{x}_l}{y_{lk}} = \min_{y_{sk} > 0} \left[\frac{\bar{x}_s}{y_{sk}} \right]$$

est une nouvelle solution fondamentale donnant à z une nouvelle valeur $\bar{z}' \leq \bar{z}$;

En effet on peut écrire

$$x'_s = \bar{x}_s - y_{sk} \bar{x}_k \quad s \in I$$

puisque $y_{sk} > 0$, $x'_s < \bar{x}_s$; pour qu'elle reste positive il suffit que $\bar{x}_s - y_{sk} \bar{x}_k > 0$, autrement dit il faut que

$$\bar{x}_k \leq \min \left[\frac{\bar{x}_s}{y_{sk}} \right];$$

et pour que la nouvelle solution soit une solution fondamentale choisissons $\bar{x}_k$ telle que :

$$\bar{x}_k = \frac{\bar{x}_1}{y_{1k}} = \min_{y_{sk} > 0} \left[\frac{x_s}{y_{sk}} \right]$$

alors on a :
$$x'_1 = \bar{x}_1 - y_{1k} \frac{\bar{x}_1}{y_{1k}} = 0$$

z prend la valeur :

$$\bar{z}' = \bar{z} - (z_k - c_k) \frac{\bar{x}_1}{y_{1k}} \leq \bar{z} \quad \text{puisque } z_k - c_k > 0$$

d - 3 La condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution fondamentale soit minimale est que pour tout $j \in J$ on ait :

$$z_j - c_j \leq 0$$

D'après (d-1) et (d-2) la condition est nécessaire. (4.7) montre que z est minimum pour $x_j = 0$ (tous les j) puisque $c_j - z_j \geq 0$ donc la solution considérée est bien minimale.

Pour qu'une autre solution soit aussi minimale il faut que pour $x_j > 0$ on ait $z_j - c_j = 0$

e) Conséquences

Les propriétés précédentes nous permettent, X^B étant donné, Y et $z_j - c_j$ étant calculés de savoir si on a une solution optimale, ou s'il n'en existe pas, ou s'il faut pousser le calcul pour en trouver une.

Dans ce cas on calcule une nouvelle solution X'^B avec les nouvelles valeurs Y et $z'_j - c_j$

En pratique ce passage d'une solution à une autre se fait en introduisant une colonne (A_k) dans la base et en faisant sortir une colonne (A_l) ; k est choisi de façon que

$$z_k - c_k = \max_{j \in J} (z_j - c_j)$$

f) Présentation des calculs

Il faut :

- Déterminer une solution fondamentale.
- Calculer la matrice $Y = (Y_j) = (y_{sj})$ et les quantités $z_j - c_j$
- Tester les $z_j - c_j$:

α) Si $z_j - c_j \leq 0$ pour tout j la solution considérée est minimale,

β) Si $z_j - c_j > 0$ pour $j \in J_1 \subset J$,

alors :

— Tester les (Y_j) $j \in J_1$,

Si $(Y_j) \leq 0$ pour un $j \in J_1$ il n'y a pas de solution minimale finie.

Sinon déterminer k par la relation

$$| z_k - c_k | = \max / z_j - c_j /$$

et l par la relation :

$$\frac{x_l}{y_{lk}} = \min_{y_{sk} > 0} \left[\frac{x_l}{y_{sk}} \right]$$

- Considérer la nouvelle base B' déduite de B par substitution de (A_k) à (A_l)

g) Tableau du Simplexe :

- Les opérations précédentes se font sur un tableau de la forme suivante :

		C_1	C_2	...	...	C_s	...	...	C_j	...	...	C_n
		X_1	X_2	...	...	X_s	...	...	X_j	...	...	X_n
Z	$\bar{Z}$	$Z_1 - C_1$	$Z_2 - C_2$	...	...	$Z_s - C_s$	...	...	$Z_j - C_j$	...	...	$Z_n - C_n$
X_1	$\bar{X}_1$	y_{11}	y_{12}			y_{1s}			y_{1j}			y_{1n}
X_2	$\bar{X}_2$	y_{21}	y_{22}			y_{2s}			y_{2j}			y_{2n}
:	:	:										
:	:	:										
X_s	$\bar{X}_s$	y_{s1}							y_{sj}			
:	:											
:	:											
:	:											
X_m	$\bar{X}_m$	y_{m1}							y_{mj}			y_{mn}

à chaque changement de base on change le tableau en l'écrivant avec la nouvelle base et on recommence l'algorithme.

- Le passage d'un tableau à un autre se fait en appliquant des **formules de changement de base**. Ces formules de changement de base peuvent facilement être établies et l'on a en reprenant les notations précédentes, les nouvelles valeurs y' , x' , z' données par :

$$y'_{sj} = y_{sj} - \frac{y_{lj}}{y_{lk}} y_{sk} \quad s \in I - \{l\} \quad j \in N$$

$$y'_{kj} = \frac{y_{lj}}{y_{lk}} \quad j \in N$$

$$\bar{x}'_s = \bar{x}_s - \frac{\bar{x}_l}{y_{lk}} y_{sk} \quad \bar{x}'_k = \frac{\bar{x}_l}{y_{lk}}$$

$$z'_j - c_j = z_j - c_j - \frac{y_{lj}}{y_{lk}} \quad (z_k - c_k)$$

$$\bar{z}' = \bar{z} - \frac{\bar{x}_l}{y_{lk}} \quad (z_k - c_k)$$

h) Obtention d'une solution fondamentale de départ

Il résulte de ce qui précède que pour appliquer l'algorithme, il est nécessaire de connaître une solution fondamentale de départ. Lorsque cette solution n'est pas apparente à priori, on peut :

α) Si le système des contraintes se présente sous forme d'inégalités introduire m variables d'écart positives (cf II-3), les d_i étant négatifs ; une solution fondamentale est alors donnée par :

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

$$\text{et } x_{n+1} = -d_1, \quad x_{n+2} = -d_2 \dots x_{n+m} = -d_m$$

β) Si le système des contraintes se présente sous forme d'égalités, introduire m variables "artificielles" ($\pm x_{n+i}$) le signe placé devant les x_{n+i} étant celui de d_i , le système s'écrit alors :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \pm x_{n+i} = d_i$$

et de plus associer à ces variables artificielles, dans la forme linéaire, une constante positive M aussi grande que l'on veut, (z devient alors

$$z = M \sum_{i=1}^m x_{n+i} + \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{et le minimum n'est atteint}$$

que si $x_{n+i} = 0$ (tous les i) : dans ces conditions, une solution fondamentale est donnée par :

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \quad x_{n+1} = |d_1| \quad \dots \quad x_{n+m} = |d_m|$$

i) Obtention de toutes les solutions optimales.

Il est intéressant de connaître en pratique toutes les solutions optimales du problème. Deux cas peuvent en effet se présenter :

α) ou bien la solution optimale est unique, c'est alors une solution réalisable fondamentale donnée par l'algorithme du simplexe;

β) ou bien il existe une infinité de solutions optimales : ce sont les combinaisons linéaires convexes de solutions fondamentales optimales qui sont en nombre fini (points extrémaux du polyèdre).

— Pour connaître ces solutions fondamentales optimales, il suffit de considérer le tableau optimal du simplexe :

— Si $z_k - c_k = 0 \quad k \in J$, on obtient de nouveau un tableau optimal en faisant entrer $\vec{a}_k$ dans la base, le vecteur qui sort étant déterminé par le critère de sortie habituel ; les formules de changement de base montrent que cette opération ne change pas la valeur de z et des $z_j - c_j$.

— D'autre part, si une variable fondamentale $\bar{x}_1 = 0$ dans un tableau optimal, les formules de changement de base montrent que z reste inchangée si on remplace $\bar{x}_1$, dans la base considérée, par n'importe quelle variable x_k pour laquelle $y_{1k} \neq 0$ et que, la solution obtenue dans ce cas ne diffère en rien de l'ancienne. Mais, dans le nouveau tableau, certains $z_j - c_j$ peuvent être nuls ce qui nous ramène au cas précédent.

- Lorsqu'il n'est plus possible, en faisant entrer une variable x_k telle que $z_k - c_k = 0$ ou en faisant sortir une variable x_l telle que $\bar{x}_l = 0$ d'obtenir de nouvelles solutions réalisables, on aura obtenu l'ensemble des solutions fondamentales optimales.

IV - 2 - Interprétation économique de la méthode.

- Considérons les formules de changement de base (IV - 1-g) et (4.9) :

$$\bar{x}'_s = \bar{x}_s - y_{sk} \bar{x}_k$$

cette formule doit être vérifiée quand on fait $\xrightarrow{\text{entrer } a_k}$ dans la base et qu'on en fait sortir $\xrightarrow{\text{sortir } a_l}$, c'est à dire lorsque le bien produit a_k remplace le bien produit a_l .

Elle montre que si $\bar{x}_k$ augmente de 1, x_s doit diminuer de y_{sk} : y_{sk} est donc le **taux marginal de substitution** du bien produit a_k au bien produit a_s .

- Si $\bar{x}_k$ augmente de 1, z augmente de c_k , et x'_s diminuant (pour tous les $s \in I$) de y_{sk} , entraîne une variation de z égale à
- $$\sum_{s \in I} c_s (-y_{sk}) = -z$$

La variation totale de z est alors $\Delta z = c_k - z_k$; $c_k - z_k$ est donc le **coût marginal algébrique** correspondant à l'introduction du bien produit a_k dans la base.

IV - 3 - Cas particuliers :

1) Dégénérescence.

Il y a dégénérescence lorsqu'une ou plusieurs variables fondamentales sont nulles (certaines sous-matrices (A, d) d'ordre m sont singulières); ceci ne peut se produire que si, et seulement si, au moins une variable fondamentale entre dans la base en remplacement d'une variable déjà nulle.

2) Cyclage

Lorsqu'il y a dégénérescence, la forme linéaire peut prendre la même valeur pendant deux itérations successives, et la nouvelle solution réalisable sera encore dégénérée. Si ceci se produit pendant plusieurs itérations successives, il est possible de retrouver une base déjà obtenue précédemment et à partir de là de "cycler" indéfiniment sur une même séquence de base.

IV - 4 - Problèmes particuliers

1) Programmes linéaires paramétriques

On qualifie ainsi, les problèmes de programmation linéaire dans lesquels les constantes dépendent de paramètres variables ; on peut en effet avoir :

$$1) \vec{d} = \vec{d}(\alpha) \quad \text{ou} \quad 2) \vec{c} = \vec{c}(\alpha) \quad \text{ou} \quad 3) A = A(\alpha)$$

on exposera par la suite les propriétés principales (sans démonstrations afin de ne pas allonger le texte) : ces propriétés peuvent être établies facilement en reprenant la méthode du Simplexe :

a) 1er cas

Supposons que $\vec{d} = (d_i)$ soit une fonction linéaire d'un paramètre α : $\vec{d} = \vec{d}_0 + \alpha \vec{\delta}$

On montre, dans ce cas que, partant d'une solution fondamentale $\vec{X}_0^{Bo}$ correspondant à une base B_0 et à la valeur $\alpha_0 = 0$ du paramètre, et faisant croître α par valeurs positives, on peut déterminer une série de valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ (appelées "valeurs critiques") et une série de bases $B_1, B_2, \dots, B_p$ ayant les propriétés suivantes :

- B_i est déduite de B_{i-1} par substitution d'un ou de plusieurs vecteurs $\vec{a}_{j_i}$ à $\vec{a}_{j_{i-1}}$:

- la solution fondamentale $\bar{X}^{B_i}$ correspondant à B_i et à $d_0 + \alpha \vec{\delta}$ est une solution optimale pour toute valeur de α telle que

$$\alpha_i < \alpha < \alpha_{i+1} \quad (1 \leq i \leq p-1)$$
- Si $(B_p)^{-1} \vec{\delta} \geq 0$, $\bar{X}^{B_p}$ est une solution optimale pour toute valeur de $\alpha > \alpha_p$ sinon il n'existe pas de solution réalisable.

b) 2ème cas

Supposons que $\vec{c} = (c_j)$ soit une fonction linéaire d'un paramètre α

$$\vec{c} = c_0 + \alpha \vec{\delta}$$

On montre dans ce cas, que partant d'une solution fondamentale $\bar{X}_0^{B_0}$ correspondant à une base B_0 et à la valeur $\alpha_0 = 0$ du paramètre et faisant croître α par valeurs positives, on peut déterminer une série de valeurs critiques $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_p$ et une série de bases $B_1, B_2 \dots B_p$ ayant les propriétés suivantes :

- B_i est déduite de B_{i-1} par substitution d'un ou de plusieurs vecteurs $\vec{a}_{j_i}$ à $\vec{a}_{j_{i-1}}$
- La solution fondamentale $\bar{X}^{B_i}$ correspondant à B_i et à $c_0 + \alpha \vec{\delta}$ est une solution optimale pour toute valeur de α telle que

$$\alpha_i < \alpha < \alpha_{i+1} \quad (1 \leq i \leq p-1)$$
- Si $\vec{\delta}^{B_p}$ est le vecteur dont les composantes sont $\delta_j, j \in$ à l'ensemble des indices de B_p , et si $\vec{\delta}^{B_p} B_p^{-1} A \leq 0$, $\bar{X}^{B_p}$ est une solution optimale pour tout $\alpha > \alpha_p$

Sinon il n'existe pas de solution optimale finie pour $\alpha > \alpha_p$

c) 3ème cas.

On suppose que $A = A(\alpha)$, ce cas est beaucoup plus complexe à traiter que les cas précédents, toutefois des propriétés semblables à celles énoncées plus haut, peuvent être établies dans le cas où un seul élément a_{ij} est fonction de α .

CHAPITRE V

THEOREME DE KUHN-TUCKER

PROGRAMMES QUADRATIQUES

V - 1 - INTRODUCTION

Pour résoudre les problèmes d'extrémas liés classiques (Maximer $f(x_1, \dots, x_n)$ compte tenu de $g_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad i = 1, \dots, m$, par exemple), nous avons vu (chap. I) que la méthode employée était celle, dite des multiplicateurs de Lagrange qui consiste à considérer l'expression :

$$L(X, U) = f(X) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(X) \quad (5.1)$$

($i = 1, \dots, m$) appelée fonction de Lagrange. Sous forme vectorielle, elle s'écrit : $L(\vec{X}, \vec{U}) = f(\vec{X}) + \vec{u} \cdot \vec{g}(\vec{X})$

Le problème ainsi posé est un cas particulier du problème plus général qui consiste à optimiser $f(x_1, \dots, x_n)$ compte tenu de $g_i(x_1, \dots, x_n) \geq 0$; les chapitres précédents ont traité le cas où f et les g_i étaient des fonctions linéaires.

Les problèmes que l'on rencontre en pratique ne conduisent pas toujours à des fonctions linéaires, ainsi dans le cas de l'entreprise qui cherche à minimiser le coût total z de ses biens produits, la forme z à minimiser n'est pas linéaire, si le coût unitaire n'est pas indépendant de la quantité produite du bien considéré. Il en est ainsi si la fonction de production $P(x_1, \dots, x_n)$ n'est pas linéaire et homogène, si c_m est le coût moyen, le coût marginal c_m est alors $c_m = c_m + P \frac{dc_m}{dP}$, et $c_m = c_m - P \frac{dc_m}{dP}$, la fonction à optimiser z ne se présentera plus dès lors sous forme linéaire.

D'autre part certaines des contraintes peuvent aussi se présenter sous forme non-linéaire.

Dès lors, il serait intéressant de considérer une théorie d'ensemble des programmes non-linéaires dont les programmes linéaires seraient un cas particulier.

Kuhn et Tucker ont dégagé un important résultat de cette théorie.

V - 2 - Théorème de Kuhn-Tucker.

1 - Définitions.

— on dit que $f(x_1, \dots, x_n)$ est concave dans une région si pour tout $t, 0 \leq t \leq 1$ et pour tout couple de points $X' (x'_1, \dots, x'_n)$, $X'' (x''_1, \dots, x''_n)$ on a :

$$(1-t) f(\vec{X}') + t f(\vec{X}'') \leq f[(1-t)\vec{X}' + t\vec{X}'']$$

— un couple $(\vec{X}, \vec{U})$ est appelé col (Saddle-point) de la fonction $L(\vec{X}, \vec{U})$, si pour tout $\vec{X} (x_1, \dots, x_n) \geq 0$, et $\vec{U} (u_1, \dots, u_n) \geq 0$ on a $\vec{X} \geq 0, \vec{U} \geq 0$, et

$$L(\vec{X}, \vec{U}) \leq L(\vec{X}, \vec{U}) \leq L(\vec{X}, \vec{U}) \quad (5.2)$$

2 - Théorème

Soit à trouver un vecteur $\vec{X} (x_1, \dots, x_n)$ qui rende optimale $f(\vec{X})$ soumise aux contraintes :

$$\vec{X} \geq 0 \quad g_i(\vec{X}) \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

Si $f(\vec{X})$ et $g_i(\vec{X})$, $i = 1, \dots, m$, sont des fonctions concaves pour $\vec{X} \geq 0$, et s'il existe un point $a (a_1, \dots, a_n)$ tel que $\vec{a} \geq 0$ et $g_i(a) \geq 0$, alors une solution $\vec{X} (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ est optimale si, et seulement si, il existe un point $\vec{U} (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$, tel que $(\vec{X}, \vec{U})$ soit un col de la fonction de Lagrange $L(\vec{X}, \vec{U})$.

Démonstration

En effet, soit $\bar{X}$ une solution optimale, définissons dans un espace E^{m+1} deux ensembles A et B tels que :

$$A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} z_0 \\ \vec{Z} \end{smallmatrix} \right) ; \left(\begin{smallmatrix} z_0 \\ \vec{Z} \end{smallmatrix} \right) \leq \left(\begin{smallmatrix} f(\bar{X}) \\ \vec{G}(\bar{X}) \end{smallmatrix} \right) \text{ pour } \vec{X} \geq \vec{O} \right\}$$

$$\vec{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} y_0 \\ \vec{Y} \end{smallmatrix} \right) ; \left(\begin{smallmatrix} y_0 \\ \vec{Y} \end{smallmatrix} \right) > \left(\begin{smallmatrix} f(\bar{X}) \\ \vec{O} \end{smallmatrix} \right) \right\} \quad \vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Puisque $f(\bar{X})$ et $g_i(\bar{X})$ sont concaves, A est un ensemble convexe, en effet :

$$\begin{aligned} \text{Soit } Z_i &= tZ_{i1} + (1-t)Z_{i2} \leq tg_i(\bar{X}') + (1-t)g_i(\bar{X}'') \\ &\leq g_i[t\bar{X}' + (1-t)\bar{X}''] \end{aligned}$$

D'autre part $\bar{X}$ étant une solution optimale A et B n'ont aucun élément commun (ils sont disjoints) puisque $z_0 \leq f(\bar{X})$ et $y_0 > f(\bar{X})$.

On sait alors (par le lemme de séparation des ensembles convexes) qu'il existe un vecteur $\vec{V} [v_0, v_1, v_2, \dots, v_n]$ tel que

$$\vec{V} \begin{pmatrix} f(\bar{X}) \\ \vec{G}(\bar{X}) \end{pmatrix} \leq \vec{V} \begin{pmatrix} f(\bar{X}) \\ \vec{O} \end{pmatrix} \text{ pour tout } \begin{pmatrix} z_0 \\ \vec{Z} \end{pmatrix} \in A, \begin{pmatrix} y_0 \\ \vec{Y} \end{pmatrix} \in B$$

(D'après la définition de A)

D'autre part d'après la définition de B, $\vec{V} \geq \vec{O}$ puisque $\begin{pmatrix} f(\bar{X}) \\ \vec{O} \end{pmatrix}$

est une borne inférieure de B, nous avons :

$$v_0 f(\bar{X}) + \vec{v} \cdot \vec{G}(\bar{X}) \leq v_0 f(\bar{X}) \text{ pour tout } \vec{X} \geq \vec{O}$$

$$\text{D'autre part } v_0 > 0 \text{ car si } v_0 = 0 \text{ on aurait } \vec{v} \cdot \vec{G}(\bar{X}) \leq 0$$

pour tout $\vec{X} \geq \vec{O}$ ce qui contredit l'hypothèse ($g_i(a) > 0$)

$$\text{Posons } \bar{U} = \frac{\vec{v}}{v_0} \quad \text{alors} \quad \bar{U} \geq \vec{0}$$

$$\text{et } f(\vec{x}) + \bar{U} \cdot \vec{G}(\vec{x}) \leq f(\bar{x}) \quad \text{ou } L(\vec{x}, \bar{U}) \leq f(\bar{x})$$

$$\text{et pour } \vec{x} = \bar{x}, f(\bar{x}) + \bar{U} \cdot \vec{G}(\bar{x}) \leq f(\bar{x}), \text{ soit } \bar{U} \cdot \vec{G}(\bar{x}) \leq 0$$

$$\text{mais, puisque } \vec{G}(\bar{x}) \geq 0 \text{ par hypothèse, alors } \bar{U} \cdot \vec{G}(\bar{x}) = 0$$

$$\text{donc } L(\vec{x}, \bar{U}) \leq L(\bar{x}, \bar{U}) \leq L(\bar{x}, U) \text{ pour tout } \vec{x} \geq \vec{0}, \bar{U} \geq \vec{0}$$

Montrons maintenant que si $(\bar{x}, \bar{U})$ est un col de $L(\vec{x}, \vec{U})$, pour $\vec{x} \geq \vec{0}, \bar{U} \geq \vec{0}$, $\bar{x}$ est alors une solution optimale du problème.

En effet, si $(\bar{x}, \bar{U})$ est un col de $L(\vec{x}, \vec{U})$, (5.2) s'écrit en remplaçant $L(\vec{x}, \vec{U})$ par sa valeur (5.1)

$$f(\vec{x}) + \bar{U} \cdot \vec{G}(\vec{x}) \leq f(\bar{x}) + \bar{U} \cdot \vec{G}(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) + \bar{U} \cdot \vec{G}(\bar{x})$$

$$\text{pour tout } \vec{x} \geq \vec{0} \quad \bar{U} \geq \vec{0}$$

La seconde inégalité doit être vérifiée pour tout $\bar{U} \geq \vec{0}$ comme $\vec{G}(\bar{x}) \geq 0$ par hypothèse, $\bar{U} \cdot \vec{G}(\bar{x}) \geq 0$ mais $\bar{U} = \vec{0}$ étant solution $f(\bar{x}) + \bar{U} \cdot \vec{G}(\bar{x}) \leq f(\bar{x})$ donc on doit avoir $\bar{U} \cdot \vec{G}(\bar{x}) = 0$, et alors puisque $\bar{U} \cdot \vec{G}(\vec{x}) \geq 0$ on a $f(\vec{x}) \leq f(\bar{x}) + \bar{U} \cdot \vec{G}(\vec{x}) \leq f(\bar{x})$ pour tout $\vec{x} \geq \vec{0}$.

$\bar{x}$ est donc un maximum

c. q. f. d.

3 - Application : dualité dans les programmes linéaires.

- a) Le théorème précédent établit une correspondance biunivoque entre la recherche d'un col de $L(\vec{x}, U)$ et la recherche du maximum de f sous les contraintes g_i .

Reprenons les notations du chapitre II (matricielles) et considérons le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \text{Soit à maximiser} \quad & f = c X \\ \text{soumise aux contraintes} \quad & A X \geq d \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

$L (X, U)$ s'écrit dans ce cas :

$$L (X, U) = c X + U (A X - d) = c X + U A X - U d$$

et la recherche d'un col de $L (X, U)$ est équivalente au problème considéré.

En remplaçant $L (X, U)$ par $-L (X, U)$, on change les rôles de minimum et de maximum associés à X et U , ainsi la recherche d'un col de $L (X, U)$ est aussi équivalente au problème suivant :

Minimiser $+ U d$

$$\text{Sous les contraintes} \quad U A \leq c \quad U \geq 0$$

donc ce programme est équivalent au programme initial; on dit que c'est son dual; et il peut être parfois plus simple, pratiquement de résoudre ce problème que le problème initial.

b) Interprétation économique de la dualité.

Dans le cas de l'entreprise, nous avons (II-2-1) donné la signification des différents facteurs, ainsi le problème

$$\begin{aligned} \sum_j a_{ij} x_j &\geq d_i \\ x_j &\geq 0 \\ \text{Min.} \quad z &= \sum_j c_j x_j \end{aligned}$$

signifiait :

$\sum_j$ (quantité de la ressource i intervenant dans j au niveau 1)

(quantité de j produite) $\geq$ (demande de i)

(quantité du bien j produite) ≥ 0

Minimiser (le coût total) = $\sum_j$ (coût unitaire de j) $\times$ (quantité de j)

Le problème dual s'écrit :

$$\sum_i a_{ij} u_j \leq c_j \quad j = 1 \dots n$$

$$u_i \geq 0 \quad i = 1 \dots m$$

$$\text{maximer } W = \sum_i d_i u_i$$

c'est à dire

$$\sum_i (\text{quantité de la ressource } i \text{ intervenant dans } j \text{ au niveau } 1) \times u_i$$

$$\leq (\text{coût unitaire de } j)$$

$$\text{maximer } (W) = \sum_i (\text{demande de } i) \times u_i$$

L'homogénéité économique de ces relations conduit à donner à u_i la signification de prix unitaire. Le problème dual prend alors la signification suivante :

étant donnée une demande d_i pour chacune des m ressources i et un coût unitaire c_j pour chacun des biens produits j , quel doit être le prix unitaire de chaque ressource i pour que la valeur totale du bien produit j au niveau 1 soit inférieure ou égale au coût c_j et que la valeur totale des ressources demandées soit maximale.

V - 3 - Programmes quadratiques

1 - Définition :

On appellera ainsi les problèmes pour lesquels les contraintes sont linéaires et où la forme à optimiser est du second degré en x .

Ceci se produit, on l'a vu, dans les cas où les coûts de production dans une entreprise ne sont pas indépendants du niveau de production.

2 - Méthode de résolution (de Wolfe)

Considérons le problème suivant sous forme réduite :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } f &= \sum_j c_j x_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k} x_j b_{jk} x_k \quad j, k = 1, \dots, n \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\sum_j a_{ij} x_j = d_i \quad i = 1, \dots, m$$

ou sous forme matricielle (cf II - 2 - 2)

$$f = cX - \frac{1}{2} X' B X$$

$$X \geq 0$$

$$AX = d$$

B étant une matrice nxn symétrique.

Supposons que f soit une fonction convexe c'est à dire que B est positive et semi-définie : soit $X' B X \geq 0$ pour tout X, X'. Cette restriction est nécessaire pour qu'un maximum local soit aussi un maximum global.

Le théorème de Kuhn-Tucker est applicable, vu les structures des fonctions f et g_i ; L (X, U) s'écrit ;

$$L(X, U) = c X - \frac{1}{2} X' B X + (A X - d) U \quad (5.3)$$

Les conditions d'obtention d'un maximum sont celles de l'obtention d'un col de L (X, U), ces conditions s'expriment pour x_j par :

$$\text{— ou bien } x_j = 0 \quad \text{et } \frac{\partial L}{\partial x_j} \leq 0$$

$$\text{— ou bien } x_j > 0 \quad \text{et } \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0$$

$$\text{or } \frac{\partial L}{\partial X} = c - B X + A U$$

Si $\vec{V} (v_1, \dots, v_n)$ est un vecteur positif, ces conditions d'obtention du maximum se traduisent alors par :

$$\frac{\partial L}{\partial x} + V = 0$$

$$V X = 0$$

$$V \geq 0$$

Un vecteur $\vec{X} \geq \vec{0}$ est solution du problème, si on peut trouver $\vec{V} \geq \vec{0}$ tel que :

$$A X = d \quad (5.4)$$

$$c - BX + A U = 0 \quad (5.5)$$

$$V X = 0 \quad (5.6)$$

$$X \geq 0 \quad (5.7)$$

$$V \geq 0 \quad (5.8)$$

ou sous forme algébrique :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = d_i, \quad i = 1 \dots m \quad (5.4)'$$

$$c_j - \sum_{k=1}^n b_{jk} x_k + \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i + v_j = 0; \quad j = 1 \dots n \quad (5.5)'$$

$$v_j x_j = 0 \quad (5.6)'$$

$$x_j \geq 0 \quad (5.7)'$$

$$v_j \geq 0 \quad (5.8)'$$

(5.4) et (5.5) définissent un polyèdre convexe (K) dans un espace $(2n + m)$; (5.6) montre qu'il y a au moins n variables v_j, x_j , qui sont nulles, il existe donc $m + n$ variables non nulles au plus, et $m + n$ équations de définition.

Donc la solution du problème initial correspond à l'un des points extrêmes de (K) (cf III-2-4)

Considérons alors l'ensemble $U^0 = O \vee^0 = O, \} X^0 / AX^0 = d \{$
cet ensemble vérifie (5.4)' et (5.6)' mais ne satisfait pas en général (5.5),
posons alors ; $z_j^0 = \begin{cases} c_j - & b_{jk} x_k^0 \end{cases}$
 u_i^0, v_j^0, x_j^0 et z_j^0 vérifient alors l'équation ;

$$c_j - \sum_{k=1}^n b_{jk} x_k + \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i + v_j \pm z_j = 0 \quad (5.9)'$$

cette équation remplace (5.5)'. Si on peut trouver une solution X^0 pour laquelle $z_j \equiv 0$ le problème initial serait alors résolu.

Considérons alors le programme linéaire suivant en x_j, u_i, v_j et z_j :

$$\text{Minimiser } \sum_j z_j$$

Soumise à

$$\sum_j a_{ij} x_j = d_i \quad (5.4)'$$

$$v_j x_j = 0 \quad (5.6)'$$

$$x_j \geq 0 \quad (5.7)'$$

$$v_j \geq 0 \quad (5.8)'$$

$$u_i \geq 0 \quad (5.10)'$$

$$\text{et } c_j - \sum_k b_{jk} x_k + \sum a_{ij} u_i + v_j \pm z_j = 0 \quad (5.9)'$$

c'est un problème pour lequel une solution réalisable est donnée par x_j^0, v_j^0, u_i^0 et z_j^0 , on peut alors lui appliquer l'algorithme du simplexe, en veillant à ce que (5.6)' soit toujours vérifiée, pour ceci il faut veiller à ce que quand x_j est une variable fondamentale, v_j ne le soit pas et réciproquement.

Wolfe a montré qu'après un nombre fini d'itérations, le minimum de $\sum_j z_j$ est atteint et a pour valeur 0, et comme $z_j \geq 0$ on a $z_j \equiv 0$ et le problème est résolu.

V - 4 - Autres méthodes

— La méthode de Wolfe exposée ci-dessus est une généralisation de la méthode des multiplicateurs de Lagrange par application du théorème de Kuhn-Tucker, et ramène le problème à celui d'un programme linéaire habituel, à résoudre par la méthode du simplexe.

Une autre méthode proposée par Beale est plutôt analogue à la méthode de Dantzig du simplexe. Par ailleurs diverses modifications à ces méthodes ont été apportées par Theil et Van Pannes, et Lemke a proposé pour les programmes quadratiques une généralisation de la méthode duale pour les programmes linéaires.

— Charnes et Lemke ont proposé une approximation, des programmes non linéaires, par des programmes linéaires et l'extension de la méthode du simplexe lorsque la forme à minimiser est la somme de fonctions convexes.

— Signalons aussi, la méthode du « potentiel logarithmique » de Frisch, d'inspiration différente de celle du simplexe, applicable aussi bien aux programmes linéaires, qu'à certains programmes non-linéaires; ainsi que la méthode du gradient (gradient Method) de Arrow-Hurwicz pour les programmes linéaires et quadratiques.

CHAPITRE VI

PROGRAMMES LINEAIRES STOCHASTIQUES

VI - 1 - INTRODUCTION

Un programme linéaire est dit stochastique si un, ou plusieurs coefficients : c_j de la fonction z à optimiser, a_{ij} , b_i du système des contraintes sont des variables aléatoires connues seulement par leur distribution.

Ceci se produit souvent en pratique, les coûts et les disponibilités dans le cas d'une entreprise, par exemple, n'étant pas fixes, mais dépendant des fluctuations de la conjoncture, de conditions climatiques... etc

Les solutions envisagées à ce problème consistent à le ramener, lorsque cela est possible, à un programme déterministe (linéaire ou non-linéaire).

Divers modèles peuvent être alors élaborés :

1) Un modèle où l'on remplace les variables aléatoires par leur moyenne, et où l'on résoud le programme déterministe ainsi obtenu, en cherchant à optimiser l'espérance mathématique de la fonction « objectif ».

2) Un modèle dans lequel les inégalités $\sum a_{ij} x_j \leq b_i$ sont remplacées par des inégalités de la forme $\text{prob} \left[\sum a_{ij} x_j \leq b_i \geq \right] p_i$; (c'est à dire qu'on cherche à déterminer x de façon à ce que la probabilité que la i ème relation du système (3.1) soit réalisée soit supérieure à p_i . On cherche alors à optimiser l'espérance mathématique de la fonction objectif.

3) Un modèle du même type que le précédent pour ce qui est des contraintes mais où l'on cherche à optimiser la fonction z de façon à ce que :

$$\text{Prob} (z \geq \sum c_j x_j) = q, \quad q \text{ étant donné}$$

On peut aussi envisager d'optimiser suivant la nature du problème la variance de la fonction objectif; il est à noter en effet que l'optimisation systématique de l'espérance mathématique peut être critiquée du fait qu'on y attache une même importance à des distributions de même valeur moyenne mais d'écart-types différents. La solution ainsi obtenue peut ne pas correspondre à la politique optimale à suivre car elle ne tient pas compte du risque.

VI - MODELE 1

1 --- Reprenons l'exemple donné en (II-1) pour le régime alimentaire :

On veut déterminer la composition donnant le coût minimum, sans connaître les prix à priori, mais en supposant connue une distribution statistique du prix de chaque aliment, (les prix étant sujets à variation suivant le climat, les stocks... etc.). On doit donc choisir les x_j de façon que :

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i \quad \text{et on cherche à minimiser l'espérance mathématique du coût, soit } E(c) = \sum_j \bar{c}_j x_j$$

Le problème ainsi posé est un programme linéaire déterministe.

2 — Supposons que b soit aussi aléatoire, c'est à dire que les besoins journaliers de chaque aliment ne soient pas connus d'une façon certaine, mais qu'on en connaisse une distribution statistique, on peut envisager alors de remplacer b par sa moyenne $\bar{b}$ et de résoudre le programme déterministe ainsi obtenu.

Toutefois, ce modèle peut être critiqué du fait que:

a) L'optimisation de l'espérance mathématique peut ne pas être un bon critère de choix au départ, ce point sera discuté plus loin.

b) Le remplacement des variables aléatoires par leur moyenne peut ne pas conduire à un choix de X qui corresponde à une politique optimale à suivre même si cet X optimise l'espérance mathématique de la fonction objectif. Il arrive parfois, par ailleurs, que l'on connaisse mal les distributions statistiques des différentes variables aléatoires, et que l'on préfère dans ce cas introduire une sécurité dans le choix des disponibilités. Les contraintes sont alors écrites sous la forme $\text{Prob} (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i) \geq P_i$ (la probabilité que la i ème relation ou contrainte soit réalisée doit être supérieure à un nombre choisi p_i); ce qui mène à considérer le modèle suivant :

VI - 3 - MODELE II

a) Soit à

$$\text{optimiser} \quad z = \bar{c} \cdot X \quad (6.1)$$

$$\text{sous les conditions : } \text{Prob} (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i) \geq p_i \quad (6.2) \quad i=1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n$$

On suppose que les a_{ij} sont constants et que b_i a une valeur moyenne $E (b_i) = \bar{b}_i$ et un écart-type σ_{b_i} , et que $\bar{c} (\bar{c}_1 \dots \bar{c}_n)$ est la valeur moyenne de $c (c_1 \dots c_n)$.

b) Transformation du problème.

Moyennant ces hypothèses, (6.2) peut s'écrire :

$$\text{Prob} (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i) = \text{Prob} \left[\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \bar{b}_i}{\sigma_{b_i}} \leq \frac{b_i - \bar{b}_i}{\sigma_{b_i}} \right] \geq P_i$$

$\frac{b_i - \bar{b}_i}{\sigma_{b_i}}$ est une variable aléatoire réduite et la condition

Prob ($\sum a_{ij} x_j \leq b_i$) $\geq p_i$ peut s'écrire :

$$F \left(\frac{\sum a_{ij} x_j - \bar{b}_i}{\sigma_{b_i}} \right) \geq p_i \quad \text{ou} \quad \frac{\sum a_{ij} x_j - \bar{b}_i}{\sigma_{b_i}} \leq F^{-1}(p_i)$$

(Si b_i a une distribution normale par exemple on a

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda \quad)$$

Donc $\sum a_{ij} x_j \leq \bar{b}_i + \sigma_{b_i} F^{-1}(p_i)$

et en posant $\bar{b}_i + \sigma_{b_i} F^{-1}(p_i) = d_i$, on peut écrire sous forme matricielle

$$A X \leq d \quad (6.3)$$

et le problème revient à optimiser $z = \bar{c} X$ (6.1)

sous les conditions

$$A X \leq d \quad (6.3)$$

$$X \geq 0$$

On est ramené à un problème de programmation linéaire déterministe.

c) Il est à remarquer que dans ce modèle et dans le modèle précédent, l'objectif choisi était l'optimisation de l'espérance mathématique (minimisation ou maximisation d'un gain). Le domaine de validité du critère de l'espérance mathématique repose toutefois sur les certitudes pratiques qu'autorise la loi des grands nombres en cas d'épreuves répétées indépendantes ou de processus aléatoires faiblement liés en chaîne; dans la pratique l'entreprise peut avoir à faire face à des éventualités désastreuses et de probabilités très petites, et l'optimisation de l'espérance mathématique est primée par la limitation du risque; on peut envisager aussi le cas où une éventualité étant considérée comme désastreuse le but premier est de maintenir la probabilité de cette éventualité à un niveau petit, peut être, mais non nul, qui caractérise le taux du risque admissible. La fonction objectif prend alors la forme suivante :

optimiser z sous la condition $\text{Prob} (C X \geq z) = q$ (6.4)
ce qui amène à envisager le modèle suivant :

IV - MODELE III

a) PR I Soit à Maximiser z
Sous les conditions $\text{Prob} (C X \leq z) = q$ (6.4)
et $\text{Prob} (\sum_{ij} a_{ij} x_j \leq b_i) \geq p_i$ (6.2)
 $x_j \geq 0$

avec les hypothèses suivantes :

- 1 - les a_{ij} sont constants
- 2 - b_i a une distribution normale avec une valeur moyenne $E (b_i) = \bar{b}_i$
et un écart-type σ_{b_i}
- 3 - c_j a une distribution normale avec une valeur moyenne $\bar{c}_j = E (c_j)$
- 4 - $q \leq 0,5$

b) Les contraintes (6.2) peuvent être transformées comme précédemment dans le modèle II et s'écrivent alors sous forme matricielle $A X \leq d$ (6.3)

Définissons une matrice $V = (v_{kj})$ telle que $v_{kj} = E (c_j - \bar{c}_j) (c_k - \bar{c}_k)$
et calculons la variance de $\sum_j c_j x_j$; on a :

$$\begin{aligned} \text{Var} (\sum_j c_j x_j) &= E \left[\sum_j (c_j - \bar{c}_j) x_j \right]^2 \\ &= \sum_{jk} E (c_j - \bar{c}_j) (c_k - \bar{c}_k) x_j x_k \\ &= \sum_{jk} v_{kj} x_j x_k = X' V X \end{aligned}$$

Comme la distribution des c_j est normale, $C X = \sum_j c_j x_j$ aura la même distribution, avec une valeur moyenne $\bar{C} X = \sum_j \bar{c}_j x_j$ et une variance $X' V X$:

On a alors :

$$\begin{aligned} \text{Prob} (CX \leq z) &= \text{Prob} \left[\frac{CX - \bar{C}X}{\sqrt{X' V X}} \leq \frac{z - \bar{C}X}{\sqrt{X' V X}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{z - \bar{C}X}{\sqrt{X' V X}}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda = q \end{aligned}$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{z - \bar{C}X}{\sqrt{X' V X}} &= h(q) \quad \text{avec} \quad h(q) \leq 0 \quad \text{si} \quad q \leq 0,5 \\ \text{et} \quad z &= \bar{C}X + h(q) \sqrt{X' V X} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Le problème initial se ramène donc au problème suivant :

$$\begin{aligned} \underline{\text{PR 2}} \quad \text{Maximiser} \quad z &= \bar{C} + h \sqrt{X' V X} \quad (6.5) \\ \text{sous les conditions} \quad AX &\leq d \quad (6.3) \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

Montrons que la fonction z ainsi définie est une fonction concave ; en effet, pour qu'il en soit ainsi on doit avoir :

$$\begin{aligned} t z(X_1) + (1-t) z(X_2) &\leq z[tX_1 + (1-t)X_2] \\ \text{pour } 0 &\leq t \leq 1 \text{ ou} \quad t \bar{C}X_1 + h t \sqrt{X_1' V X_1} + (1-t) \bar{C}X_2 \\ &+ (1-t) h \sqrt{X_2' V X_2} \leq \bar{C}[tX_1 + (1-t)X_2] \\ &+ h \sqrt{[tX_1 + (1-t)X_2]' V [tX_1 + (1-t)X_2]} \end{aligned}$$

ou en élevant au carré et en soustrayant le 2ème membre du premier :

$$\begin{aligned} t^2 X_1' V X_1 + (1-t)^2 X_2' V X_2 + 2t(1-t) \sqrt{X_1' V X_1} \sqrt{X_2' V X_2} \\ - t^2 X_1' V X_1 - 2t(1-t) X_1' V X_2 - (1-t)^2 X_2' V X_2 \\ = 2t(1-t) \left[\sqrt{X_1' V X_1} \sqrt{X_2' V X_2} - X_1' V X_2 \right] \end{aligned}$$

qui est positif puisque V est positive et semi-définie et :

$$(X'_1, V X_2)^2 \leq (X'_1, V X_1) (X'_2, V X_2)$$

c) On peut appliquer à ce problème le théorème de Kuhn-Tucker puisque la fonction objectif est concave et que les contraintes sont linéaires. La fonction de Lagrange (5.1) s'écrit dans ce cas :

$$L(X, t) = \bar{C} X + h \sqrt{X' V X} + (d - A X) t$$

Les conditions du maximum s'écrivent pour x_j et t_i :

$$(6.6) \quad \frac{\partial L}{\partial x_j} = \bar{c}_j - \frac{h \sum_i v_{ij} x_i}{\sqrt{\sum_{ij} v_{ij} x_i x_j}} - \sum_i a_{ij} t_i \quad \left\{ \begin{array}{l} \leq 0 \text{ pour } x_j = 0 \\ = 0 \text{ pour } x_j > 0 \end{array} \right.$$

$$(6.7) \quad \frac{\partial L}{\partial t_i} = d_i - \sum_j a_{ij} x_j \quad \left\{ \begin{array}{l} \geq 0 \text{ pour } t_i = 0 \\ = 0 \text{ pour } t_i > 0 \end{array} \right.$$

La résolution du problème peut être ramenée à celle d'un programme quadratique tel que défini en (V-3), pour ceci considérons le problème suivant :

$$\underline{\text{PR 3}} \quad \text{Max } z' = \bar{C} X - \frac{h}{2R} X' V X$$

$$\text{sous les conditions } A X \leq d$$

$$X \geq 0$$

ou R est un paramètre positif

z' est concave et pour un R donné elle possède un maximum. On peut alors énoncer la propriété suivante :

Propriété : Si une solution optimale X_0 du problème PR 3 est telle que $\sqrt{X'_0 V X_0} = R$ (6.8), elle est aussi solution du problème PR 2 et vice-versa.

En effet, la fonction de Lagrange s'écrit pour PR 3 :

$$L'(X, t) = \bar{C} X - \frac{h}{2R} X' V X + (d - A X) t$$

et les conditions du maximum sont pour x_j et t_i

$$(6.9) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial x_j} = \bar{c}_j - \frac{h}{R} \sum_i v_{ij} x_j - \sum_i t_i a_{ij} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\leq 0 \text{ pour } x_j = 0 \\ &= 0 \text{ pour } x_j > 0 \end{aligned}$$

$$(6.10) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial t_i} = d_i - \sum_j a_{ij} x_j \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\geq 0 \text{ pour } t_i = 0 \\ &= 0 \text{ pour } t_i > 0 \end{aligned}$$

si (6.8) est satisfaite, les relations (6.6), (6.7) et (6.9), (6.10) sont équivalentes. Réciproquement si X_0 est solution du problème PR 2 et si on pose $\sqrt{X'_0 V X_0} = R$ X_0 satisfait (6.9) et (6.10)

Le problème initial est ainsi ramené à un problème de programmation quadratique tel que défini en (V-3), on peut donc le résoudre par la méthode de Wolfe, par exemple, exposée au chapitre V.

Toutefois, il y a lieu de choisir R de façon à avoir $R = \sqrt{X'_0 V X_0}$. La solution n'est donc pas obtenue du premier coup, mais elle peut être obtenue par approximations successives comme il est montré par la suite.

Considérons en effet la fonction $r(R) = \sqrt{X'_0(R)' V X_0(R)}$ et supposons que le problème :

Max $z = \bar{C} X$ sous les conditions $A X \leq d$ et $X \geq 0$ ait une solution finie. La fonction $r(R)$ est alors monotone et a une limite finie :

En effet, pour $R \rightarrow \infty$ le problème Pr 3 est ramené à la recherche du maximum de $z = \bar{C} X$ sous $A X \leq d$ et $X \geq 0$ qui a une solution optimale X_{00} par hypothèse ; d'autre part, si X_{01} et X_{02} sont deux solutions du problème Pr 3 pour deux valeurs R_1 et R_2 de R nous avons :

$$\begin{aligned} \bar{C} X_{01} - \frac{h}{2 R_1} X'_{01} \vee X_{01} &\geq \bar{C} X_{02} - \frac{h}{2 R_1} X'_{02} \vee X_{02} \\ \text{et } \bar{C} X_{02} - \frac{h}{2 R_2} X'_{02} \vee X_{02} &\geq \bar{C} X_{01} - \frac{h}{2 R_2} X'_{01} \vee X_{01} \end{aligned}$$

ce qui donne après addition de ces deux inégalités :

$$(R_1 - R_2) (X'_{01} \vee X_{01} - X'_{02} \vee X_{02}) \geq 0$$

$$\text{si } R_1 \geq R_2 \quad \text{on a} \quad X_{01} > X_{02} \quad \text{ou} \quad X_0(R_1) > X_0(R_2) \\ \text{c. q. f. d.}$$

d) Principe de l'itération :

On commence par rendre maximale la fonction $z = \bar{C} X$ sous les contraintes (6.3), et on calcule $R_0 = \bigvee \overline{X'_{00} \vee X_{00}}$ (X_{00} étant la solution optimale obtenue).

Partant de cette valeur R_0 on résout le problème PR 3 en prenant $R = R_0$ et on calcule $R_1 = \bigvee \overline{X'_{01} \vee X_{01}}$, (X_{01} étant la solution optimale obtenue). Si $R_1 = R_0$ le problème est résolu et X_{01} est solution du problème PR 2.

Si $R_1 < R_0$ on recommence l'opération avec une nouvelle valeur $R = R_1$ et ainsi de suite jusqu'à obtenir $R_i = R_j$

Remarquons que si nous obtenons une même solution pour une faible variation de R nous sommes en présence d'un cas de dégénérescence.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) ARROW, HURWICZ, UZAWA.
Studies in linear and non-linear programming
(Standford University Press 1958)
- (2) BERGE G.
Espaces topologiques et fonctions multivoques (Dunod 1959).
- (3) DANTZIG G.B.
Recent advances in linear programming (Management Sciences
Nov. 1956) P. 197 - 206
- (4) GASS S.
Linear programming: methods and applications (Mc Graw-Hill
1958).
- (5) KAUFMANN A.
Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle (Dunod).
- (6) KATAOKA SH.
A Stochastic Programming Model (Econometrica Vol. 31, 1963).
- (7) KUHN ET TUCKER
Non-linear programming (University of California Press 1951).
- (8) LESOURNE
Techniques Economiques et gestion Industrielle (Dunod 1960)
P. 407-481
- (9) SIMONNARD M.
Programmation linéaire (Dunod 1962).
- (10) WEYL M.
Elementarii Theorie de convexen polyeder (commentarii
Mathematici Helvetici No. 7 1935) P. 290-306.
- (11) WOLFE PH.
The Simplex Method for quadratic programming (Econometrica
Vol. 27 1959).

DEUXIEME THESE

Propositions données par la faculté :

ETUDE DE CERTAINS CAS DE FLEXION DES POUTRES

Vu et approuvé
Lyon le
Le Doyen de la Faculté
des Sciences

Vu et permis d'imprimer
le Recteur de l'Académie de Lyon

